Seminario de Estadística 1
Tarea 3

Soriano Flores Antonio

Agosto 2019

1) Sean $X_1 \dots X_n$ muestras condicionalmente independientes del modelo *Poisson*(λ) en donde $X_i \mid \lambda \sim$ *Poisson*(λ) con i $\in \{1, \dots, n\}$.
Suponga que Θ (espacio parametral) del problema es el siguiente:

$$\Theta = \{1, 10, 20\}$$

Se tiene información inicial del problema que nos hace construir la siguiente distribución inicial de λ

$$p(\lambda) = \begin{cases} 1/2, & \lambda = 1 \\ 1/4, & \lambda = 10 \\ 1/4, & \lambda = 20 \end{cases}$$

Con la información inicial y utilizando la funcion de pérdida siguiente:

$$L(\hat{\lambda}, \lambda) = \left|\hat{\lambda} - \lambda\right|$$

- Encuentre el estimador Bayesiano para λ
- Suponga que se observa la siguiente muestra de tamaño 10:

  $$\{9, 10, 7, 11, 9, 8, 7, 18, 7, 12\}$$

  De forma secuencial (10 pasos) vaya obteniendo la distribución final $p(\lambda|x)$ y en cada paso vaya obteniendo el estimador bayesiano de λ
- Repita los puntos anteriores utilizando la función de pérdida

  $$L(\hat{\lambda}, \lambda) = \left(\hat{\lambda} - \lambda\right)^2$$

2) Una aseguradora desea modelar el tiempo que transcurre entre siniestro y siniestro. El encargado del área de riesgo sabe que la distribución exponencial es un buen modelo para este tipo de fenónemos aleatorios. Sea X la v.a. que modela el tiempo que transcurre en horas entre siniestro y siniestro de una aseguradora. Entonces:

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0} \quad X|\lambda \sim exp(\lambda)$$

Asumiendo que la distribución inicial del parámetro es $Gamma(\alpha_0, \beta_0)$ y que por experiencias anteriores se sabe que:

$$E\left(\lambda\right) = \frac{1}{10} \qquad P(\lambda > 1/5) = 0.01$$

Hint: Busque el valor de α entre 6 y 10

- Encuentre α_0 y β_0 que cumplan con las condiciones arriba mencionadas.
- Con la informacion incial que se tiene y utilizando la la funcion de pérdida:

  $$L(\hat{\lambda}, \lambda) = \left(\hat{\lambda} - \lambda\right)^2$$

  Encuentre el estimador puntual bayesiano para λ y construya un intervalo al 98 % de probabilidad de densidad máxima (lea la documentación de la funcion **hdi** de R)
- Suponga que se observa la siguiente muestra de tamaño 10 del fenómeno aleatorio. (horas transcurridas entre siniestros)

  $$\{3.34, 13.80, 3.82, 1.48, 13.85, 3.56, 12.66, 5.36, 0.33, 1.53\}$$

  Utilizando la misma función de pérdida que el punto anterior, encuentre el estimador puntual bayesiano para λ
- Encuentre la distribución predictiva final $p(x_F|\underline{x})$ y construya un intervalo al 95 % de probabilidad para la siguiente observación. ¿Cual será la probabilidad de que el proximo siniestro de la aseguradora ocurra antes de 24 horas?
- Suponga que se quiere dar una estimacion puntual para x_F, es decir, el tiempo que tardará en ocurrir el siguiente siniestro. Usando la función de pérdida

  $$L(\hat{x}_F, x_F) = (\hat{x}_F - x_F)^2$$

  Encuentre el estimador bayesiano $\hat{x}_F$

3) En clase se probó que bajo la pérdida cuadrática $L(\hat{\theta}, \theta) = \left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$ y suponiendo continuidad del parámetro entonces el estimador bayesiano puntual se obtiene simplemente por medio del calculo de la esperanza. Es decir, si aun no se observa muestra:

$$\hat{\theta} = E\left(\theta\right) = \int_{\Theta} \theta p(\theta) d\theta$$

O bien si ya se observó muestra:

$$\hat{\theta} = E\left(\theta | \, \underline{x}\right) = \int_{\Theta} \theta p(\theta|\underline{x}) d\theta$$

Suponga que ahora se define la función de pérdida absoluta:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \left|\hat{\theta} - \theta\right|$$

Demuestre que entonces el estimador puntual bayesiano $\hat{\theta}$ se obtiene al encontrar la mediana de la distribución inicial o final del parámetro. Es decir:

$$F_\theta(\hat{\theta}) = 1/2$$

O bien si ya se observo muestra:

$$F_{\theta|\underline{x}}(\hat{\theta}) = 1/2$$

4) (Distribución inicial no informativa). En la literatura bayesiana se han propuestos distribuciones iniciales no informativas con el objetivo de no tener sesgos al momento de hacer inferencias. Estas distribuciones pretender entonces dejar que sea la muestra la que aporte por completo en la inferencia final. Una idea que propuso Jeffreys fue colocar como prior lo siguiente:

Pensando $\theta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$p(\theta) \propto \sqrt{(\mathbf{I}(\theta))}$$

Donde:

$$\mathbf{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \log(p(x|\theta))}{\partial \theta^2}\right)$$

La idea de esta propuesta es la siguiente, $\mathbf{I}(\theta)$ mide la información que obtenemos sobre θ por unidad muestral, esta información queda en función de θ que es desconocido, por ejemplo suponiendo $p(x|\theta) = Poisson(\theta)$, entonces:

$$\mathbf{I}(\theta) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow p(\theta) \propto \theta^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow p(\theta|\mathbf{x}) = Ga\left(\sum_i^n x_i + \frac{1}{2}, n\right)$$

Si θ es cercano a 0, entonces la información por unidad muestral es mas grande, Jefreys entonces propone que demos mayor probabilidad a ese tipo de valores de θ para maximizar la información que proporcionará la muestra.

Una de las desventajas del método de Jeffreys es que genera distribuciones impropias y esto muchas veces puede ocasionar que se obtengan distribuciones finales que también sean impropias

Con la informacion anterior:

- Para el modelo $Bernoulli(\theta)$, encuentre la distribucion inicial de Jeffreys, es decir encuentre:

$$p(\theta) \propto \sqrt{(\mathbf{I}(\theta))}$$

- Con la distribución inicial de Jeffreys, y suponiendo que se observa una muestra de tamaño n, encuentra la distribución final de θ.
- Finalmente utilizando la funcion de pérdida cuadrática, encuentre el estimador puntual bayesiano para θ. y comparelo con el estimador puntual máximo verosimil de la estadística clasica. (¿Que pasa cuando n es grande?)